Problemas de Matemática do 2o. Grau

Como Resolvê-los Passo À Passo - Lista 2

Problemas envolvendo equações irracionais para variáveis reais, desigualdades e fórmula de Bhaskara

O "post"associado a este documento se encontra no blog `http://matematicareplay.wordpress.com`, na categoria de *Problemas de Matemática do Ensino Médio (2o. Grau)*.

Problema 1: *Resolva a equção* $\sqrt{x-1}+x=3$, *onde* $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Note a presença da raiz quadrada envolvendo a variável que se deseja encontrar (x). Isto torna esta equação uma equação *irracional*. Você deve seguir 5 passos para resolvê-la, a saber:

1o. Passo: Isole o radical de um lado da equação:

$$\sqrt{x-1}=3-x. \tag{1}$$

2o. Passo: Eleve ao quadrado ambos os lados da equação:

$$(\sqrt{x-1})^2=(3-x)^2 \Rightarrow x-1=9-6x+x^2. \tag{2}$$

3o. Passo: Organize a equação:

$$x^2-7x+10=0. \tag{3}$$

4o. Passo: Resolva a equação usando a *fórmula de Bhaskara*:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\times 1\times 10}}{2\times 1} \tag{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} \to x = \begin{cases} 5 & ou \\ 2 \end{cases} \tag{6}$$

5o. Passo: Substitua os valores encontrados na equação original para validar as soluções:

$$x = 5 \Rightarrow \quad \sqrt{5-1} + 5 \overset{?}{=} 3 \quad \Rightarrow 7 \neq 3 \quad \text{(Não é a solução).} \tag{7}$$

$$x = 2 \Rightarrow \quad \sqrt{2-1} + 2 \overset{?}{=} 3 \quad \Rightarrow 3 = 3 \quad \text{(OK! É a solução).} \tag{8}$$

Portanto, a resposta é

$$\boxed{x = 2}$$

Problema 2: *Para que valores do parâmetro a ($a \in \mathbb{R}$) a equação $\sqrt{ax-1} + x = 3$ tem solução real? ($x \in \mathbb{R}$).*

Vamos resolver a equação irracional normalmente, e depois tentar determinar as condições solicitadas para o parâmetro a.

$$\sqrt{ax-1} = 3 - x \Rightarrow ax - 1 = 9 - 6x + x^2. \tag{9}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - ax + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - (a+6)x + 10 = 0 \tag{10}$$

Usando a fórmula de Baskhara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{11}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(a+6) \pm \sqrt{(a+6)^2 - 40}}{2}. \tag{12}$$

Note que, para que $x \in \mathbb{R}$ é necessário que

$$(a+6)^2 - 40 \geq 0. \tag{13}$$

Agora precisamos resolver a desigualdade acima para a variável a. Para isso, vamos tentar colocar a desigualdade de uma forma que seja fácil encontrar os "zeros"da função $f(a)$:

$$f(a) = (a+6)^2 - 40, \tag{14}$$

ou seja, os valores de $a = a_0$ tal que $f(a_0) = 0$. Façamos, então:

$$f(a) = (a+6)^2 - 40 = (a+6)^2 - (\sqrt{40})^2 = (a+6-\sqrt{40})(a+6+\sqrt{40}). \tag{15}$$

Assim, os "zeros"são:

$$a_0 = \begin{cases} -6+\sqrt{40} & \text{e} \\ -6-\sqrt{40}, & \end{cases} \tag{16}$$

pois se você inserir estes valores de $a = a_0$ separadamente na Eq.(15), tornam verdade que $f(a) = 0$.

Mas não acabou! Estes valores são apenas os zeros da função. Agora você precisa determinar a solução para a desigualdade em si, e provavelmente vai envolver uma faixa de valores para a, certo? Pois estamos falando de resolver uma desigualdade, e não somente uma igualdade ("$= 0$"). Olhe de novo a expressão (13).

Então você deve agora (veja a Fig. 1) traçar uma reta horizontal (eixo dos números reais) e identifique as duas soluções de a_0 com "bolinhas"fechadas (isto porque, relembrando mais uma vez, temos uma desigualdade "$\geq$", e estamos *incluíndo* estes pontos da solução final; se fosse apenas"$>$", seriam "bolinhas"abertas, e estaríamos excluíndo os dois pontos, como não pertencentes à solução final).

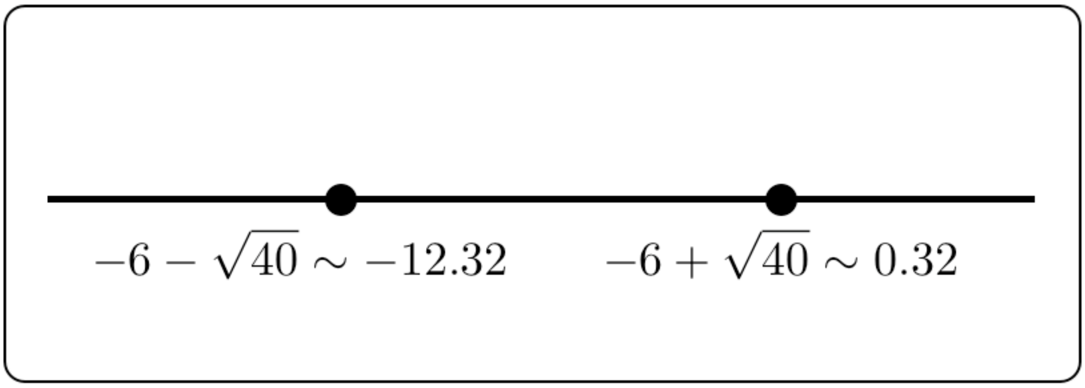

Figura 1: Indicação dos "zeros"de $f(a)$ no eixo dos números reais.

Agora devemos determinar o *sinal* de $f(a)$ nos intervalos determinados pelos "zeros"encontrados. Para isto, basta escolhermos arbitrariamente 3 valores: um valor, v_1, menor do que $-6-\sqrt{40} \sim -12.32$; um outro valor, v_3, maior do que $-6+\sqrt{40} \sim 0.32$; e finalmente um valor intermediário aos dois, v_2. Inserindo estes valores em $f(a)$, saberemos se $f(a)$ é negativa ou positiva nos intervalos especificados.

Isto é, escolhendo valores arbitrários, por exemplo: $v_1 = -15$, $v_2 = -1$ e $v_3 = 2$ e inserindo na Eq. (14), isto é, para $f(a = v_1)$, $f(a = v_2)$, e $f(a = v_3)$, temos que (verifique você mesmo!):

$$f(a)\begin{cases} >0 & (a=v_1) \\ <0 & (a=v_2) \\ >0 & (a=v_3) \end{cases} \tag{17}$$

Assim, podemos “esboçar”a função $f(a)$, como na Fig. 2. Não sabemos necessariamente a *forma* de $f(a)$, mas agora já sabemos o sinal que ela toma. Isto é sempre verdade porque $f(a)$ é contínua.

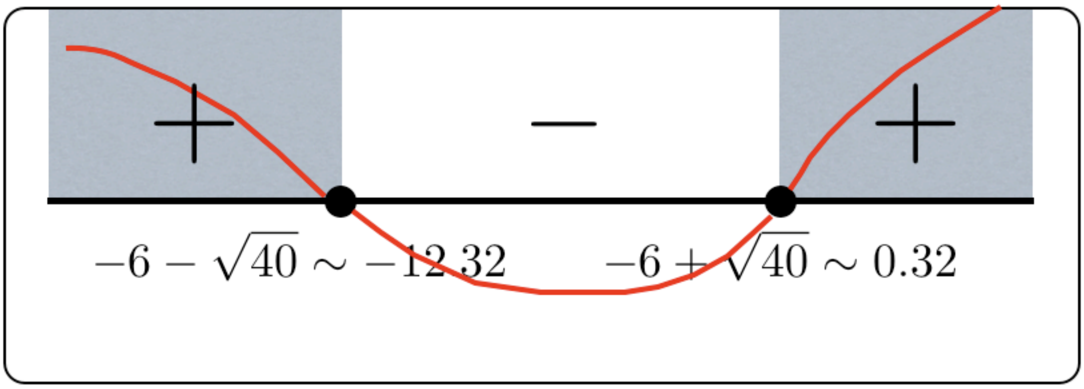

Figura 2: Esboço da funão $f(a)$ (em vermelho), e indicação do sinal da função nos intervalos considerados.

Assim, como estamos buscando valores positivos [ver (13)], a resposta é:

$$\boxed{a\in\ [-\infty,-6-\sqrt{40}]\ \cup\ [-6+\sqrt{40},+\infty]}$$

onde o colchete indica que o ponto extremo do intervalo faz parte da solução. Ou seja, para estes valores de a, a variável x toma valores reais de acordo com a Eq.(12).

Nota: Observe que o problema anterior é o mesmo que este problema com $a=1$, que satisfaz a solução apresentada, como não poderia deixar de ser.

Problemas similares propostos:

1. Resolva $\sqrt{1-2x} - x = 1$, onde $x \in \mathbb{R}$.
2. Para que valores do parâmetro a ($a \in \mathbb{R}$) a equação $\sqrt{2-ax} - x = -3$ tem solução real? ($x \in \mathbb{R}$).

Respostas:

1. $x = 0$.
2. $a \in \ [-\infty, \frac{12-\sqrt{112}}{2}] \ \cup \ [\frac{12+\sqrt{112}}{2}, +\infty]$

Corrections, Suggestions and Acknowledgements: Earlier drafts of this work were made available over the web. All efforts were made in order to release this material as free of errors as possible. Corrections and suggestions are very welcomed and will be here acknowledged in future versions.

Author's Affiliation and Contact Information:

Materials Division (AMR-C)
Institute of Aeronautics and Space (IAE)
Department of Science and Aerospace Technology (DCTA)
Pça. Mal. Eduardo Gomes, 50
Vila das Acácias
São José dos Campos - SP
CEP 12.228-904
Brazil

E-mails: `ccdantas@iae.cta.br`; `christinedantas@yahoo.com`

Typesetting: This material was typeset using LaTeX 2_ε .