Problemas de Matemática do 2o. Grau

Como Resolvê-los Passo à Passo - Lista 3

Problemas envolvendo matrizes e a fórmula de Bhaskara

O "post" associado a este documento se encontra no blog `http://matematicareplay.wordpress.com`, na categoria de *Problemas de Matemática do Ensino Médio (2o. Grau)*.

[ITA - 1991]: *Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} ; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Para que a matriz $m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$ não seja inversível é necessário que:

(A) m e n sejam positivos.

(B) m e n sejam negativos.

(C) m e n tenham sinais contrários.

(D) $n^2 = 7m^2$.

(E) n.d.a.

Solução:

A condição para que uma matriz $\mathbf{X}$ não seja inversível é dada por:

$$\det \mathbf{X} \equiv \mid \mathbf{X} \mid = 0. \tag{1}$$

Ou seja, se uma matriz tem determinante nula, isto significa que ela não é inversível.

Assim, devemos verificar se a matriz $\mathbf{X} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$ atende a esta condição. Note que esta matriz contém as variáveis m e n, e portanto a resposta deverá ser em função destas variáveis.

Primeiro, encontremos a própria matriz $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = m\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & m \\ 3m & 5m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n & n \\ 0 & n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ou seja:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2m-n & m+n \\ 3m & 5m+n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

De posse da matriz $\mathbf{X}$, vamos então verificar a condição para que seu determinante seja nulo:

$$\det \mathbf{X} = \begin{vmatrix} 2m-n & m+n \\ 3m & 5m+n \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Você deve se lembrar da regra para se calcular o determinante de uma matriz 2×2, como esta. Resulta em:

$$(2m-n)(5m+n) - 3m(m+n) = 0 \Rightarrow 7m^2 - 6mn - n^2 = 0. \tag{5}$$

Agora é importante você notar que pode resolver a equação acima usando a fórmula de Bhaskara para a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{6}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{7}$$

A questão que você deve estar se perguntando é: quem é x (a variável) do nosso problema (Eq. 5)??

Note que temos:

$$7m^2 - 6mn - n^2 = 0, \tag{8}$$

e poderíamos considerar $x = m$, resultando em:

$$m = \frac{6n \pm \sqrt{36n^2+28n^2}}{14}. \tag{9}$$

Por outro lado, poderíamos tomar:

$$-n^2 - 6mn + 7m^2 = 0, \tag{10}$$

com $x = n$, resultando em:

$$n = \frac{-6m \pm \sqrt{36m^2+28m^2}}{2}. \tag{11}$$

Tanto faz. No primeiro caso, você tem uma expressão de m em função de n; no segundo, n em função de m. Como você quer encontrar uma relação entre estas duas variáveis, tanto faz.

Tomemos o primeiro caso (Eq. 9). Temos:

$$m = \frac{6n \pm \sqrt{36n^2 + 28n^2}}{14} = \frac{6n \pm 8n}{14} \tag{12}$$

o que fornece as soluções: $m = n$ ou $m = -n/7$. A primeira solução não pode ser aceita, pois é dado no enunciado que $m \neq n$. Logo, só pode haver a segunda solução.

Portanto a única opção correta é a letra (C).

Problemas similares propostos:

Resolva o mesmo problema, considerando agora as matrizes:

1)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

1. $m = \frac{16n \pm \sqrt{176}n}{8}$.
2. $m = \frac{5n}{3}$; $m = -3n$.

Corrections, Suggestions and Acknowledgements: Earlier drafts of this work were made available over the web. All efforts were made in order to release this material as free of errors as possible. Corrections and suggestions are very welcomed and will be here acknowledged in future versions.

Author's Affiliation and Contact Information:

Materials Division (AMR-C)
Institute of Aeronautics and Space (IAE)
Department of Science and Aerospace Technology (DCTA)
Pça. Mal. Eduardo Gomes, 50
Vila das Acácias
São José dos Campos - SP
CEP 12.228-904
Brazil

E-mails: `ccdantas@iae.cta.br`; `christinedantas@yahoo.com`

Typesetting: This material was typeset using $\LaTeX\,2_\varepsilon$.